数理解析研究所講究録
第 780 巻 1992 年 14-31

楕円型方程式系に対する supersolution-subsolution 法と正値全域解の存在

佐賀大・理工　古庄康浩(Yasuhiro Furusho)

1. 序

$\boldsymbol{R}^N, N \geq 2,$ における2階半線形楕円型方程式系

$$L_k u_k = f_k(x, u, Du_k) \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N,\ k = 1, \cdots, M, M \geq 1 \tag{1.1}$$

を考える．ここで，$u = (u_1, \cdots, u_M)$, $Du_k = (\partial u_k/\partial x_1, \cdots, \partial u_k/\partial x_N)$.

$$L_k = -\left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}^k(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i^k(x)\frac{\partial}{\partial x_i} - c^k(x)\cdot\right), \quad k = 1, \cdots, M$$

は $\boldsymbol{R}^N$ 上で一様楕円型で $c^k \geq 0$ とする.(L_k に対する条件は次節で与える.)

(1.1) を満たす関数 $u \in C^2(\boldsymbol{R}^N; \boldsymbol{R}^M)$ を (1.1) の**全域解**と呼ぶ.

単独方程式

$$Lu = f(x, u, Du) \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N \tag{1.1'}$$

に対して，f に対する適当な条件の下で，もし

$$LV \leq f(x, V, DV), \quad LW \geq f(x, W, DW) \quad \text{かつ } V \leq W \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N \tag{1.2}$$

を満たす関数 $V,\ W \in C_{\mathrm{loc}}^{2+\theta}(\boldsymbol{R}^N)$ が存在すれば，$\boldsymbol{R}^N$ 上で $V \leq u \leq W$ となる $(1.1')$ の全域解 u 存在する ([1])．これを $(1.1')$ に対する supersolution-subsolution 法と呼ぼう.

一方 $M \geq 2$ の場合には (1.1) の右辺の各 f_k が Du_k を含まない方程式系に対して，特に各 f_k が変数 $u_j, j \neq k$, について非減少であれば $M = 1$ のときと同様 supersolution-subsolution 法が成り立つ (Kawano[6], Kusano-Swanson[9], Sattinger[15])．$M = 2$ で各 f_k が $u_j, j \neq k$, について非増加のときも類似のことが成り立つ (Kawano[6], Sattinger[15])．しかし，このような単調性を仮定しない方程式はしばしば現れる（[12]）が $\boldsymbol{R}^N$ における一般の (1.1) に対する supersolution-subsolution 法はよく知られていないように思われる．ここでの我々の目的は f_k に対する上の様な単調性の仮定を除いたより広いクラスの方程式系 (1.1) に対する supersolution-subsolution 法を確立して，(1.1) の正値全域解の存在証明に適用することである．

2. supersolution-subsolution 法

L_k に対して次の仮定をおく：

(H$_1$) $a_{ij}^k \in C_{\mathrm{loc}}^{1+\theta}(\boldsymbol{R}^N), b_i^k, c^k \in C_{\mathrm{loc}}^{\theta}(\boldsymbol{R}^N), 0 < \theta < 1, c^k \geq 0$ in $\boldsymbol{R}^N$, $i, j = 1, \cdots, N, k = 1, \cdots, M$.

(H$_2$) 各 L_k は $\boldsymbol{R}^N$ 上で一様楕円型，i.e.,

$$\exists a_0 > 0; \quad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}^k(x)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2, \ x, \xi \in \boldsymbol{R}^N, k = 1, \cdots, M.$$

非線形項 $\boldsymbol{f}$ は次の条件を満たすとする．

(F$_1$) $\boldsymbol{f} \in C_{\mathrm{loc}}^{\theta}(\boldsymbol{R}^N \times \boldsymbol{R}^M \times \boldsymbol{R}^N; \boldsymbol{R}^M)$ かつ次を満たす：

$\forall\, \Omega(\subset \boldsymbol{R}^N)$, $\exists\, \psi_\Omega : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}_+(= (0, \infty))$, 連続，非減少;

$|f_k(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})| \leq \psi_\Omega(|\boldsymbol{u}|)(1 + |\boldsymbol{p}|^2), \quad (x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) \in \Omega \times \boldsymbol{R}^M \times \boldsymbol{R}^N, \ k = 1, \cdots, M.$

ベクトルに対する不等式は成分毎に成立するものとする．例えば，$u_k > 0$（又は $u_k \geq 0$），$k = 1, \cdots, M$ のとき $\boldsymbol{u} > \boldsymbol{0}$（又は $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}$）で表す．

我々の主結果は次の定理である．

定理 2.1. (H_1), (H_2) 及び (F_1) を仮定する．更に，次を満たすような $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W} \in C^{2+\theta}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^N; \boldsymbol{R}^M)$ が存在するとする：

$$\boldsymbol{V} \leq \boldsymbol{W} \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N, \tag{2.1}$$

各 $k = 1, \cdots, M$ に対して

$$L_k V_k(x) \leq f_k(x, \sigma, DV_k(x)), \quad x \in \boldsymbol{R}^N, \tag{2.2}$$

for $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \cdots, \sigma_M) \in \boldsymbol{R}^M$ satisfying $V_j(x) \leq \sigma_j \leq W_j(x), j \neq k, \sigma_k = V_k(x)$,

$$L_k W_k(x) \geq f_k(x, \tau, DW_k(x)), \quad x \in \boldsymbol{R}^N, \tag{2.3}$$

for $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \cdots, \tau_M) \in \boldsymbol{R}^M$ satisfying $V_j(x) \leq \tau_j \leq W_j(x), j \neq k, \tau_k = W_k(x)$.

このとき，$\boldsymbol{R}^N$ で $\boldsymbol{V} \leq \boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{W}$ を満たすような (1.1) の全域解 $\boldsymbol{u}$ が存在する．

(2.2), (2.3) を満たす $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ をそれぞれ (1.1) の **subsolution, supersolution** と呼ぶ．この定理の証明は，Tsai[16] の定理 2.2 の特別の場合である次の補題を用いてなされる．

補題 2.1([16]). $\Omega(\subset \boldsymbol{R}^N)$ を $C^{2+\theta}$ $(0 < \theta < 1)$ 級の有界領域とし，(L_1), (L_2) 及び $\boldsymbol{R}^N$ を Ω で置き換えた (F_1) を仮定する．$\boldsymbol{V} = (V_1, \cdots, V_M), \boldsymbol{W} = (W_1, \cdots, W_M) \in C^{2+\theta}(\overline{\Omega}; \boldsymbol{R}^M)$ は $\boldsymbol{R}^N$ をΩ で置き換えた定理 2.1 の条件 (2.1)-(2.3) を満たすとする．更に，$\varphi \in C^{2+\theta}(\overline{\Omega}; \boldsymbol{R}^M)$ は $\partial\Omega$ 上で $\boldsymbol{V} \leq \varphi \leq \boldsymbol{W}$ を満たすとする．このとき，境界値問題

$$L_k u_k = f_k(x, \boldsymbol{u}, Du_k) \quad \text{in } \Omega, \qquad u_k = \varphi_k \quad \text{on } \partial\Omega, \quad k = 1., \cdots, M$$

は Ω 上で $\boldsymbol{V} \leq \boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{W}$ を満たすような解 $\boldsymbol{u} \in C^{2+\theta}(\overline{\Omega}; \boldsymbol{R}^M)$ を持つ.

定理 2.1 の証明. $\ell \in \boldsymbol{N}$ に対して, $B_\ell = \{x \in \boldsymbol{R}^N; |x| < \ell\}$ とおく. 補題 2.1 から境界値問題

(2.2) $$L_k u_k = f_k(x, \boldsymbol{u}, Du_k) \quad \text{in } B_\ell, \quad u_k = W_k \quad \text{on } \partial B_\ell, \quad k = 1, \cdots, M$$

は $\overline{B_\ell}$ 上で $\boldsymbol{V} \leq \boldsymbol{u}^{(\ell)} \leq \boldsymbol{W}$ を満たすような解 $\boldsymbol{u}^{(\ell)} \in C^{2+\theta}(\overline{B_\ell})$ を持つ. $\boldsymbol{u}^{(\ell)}$ を $\overline{B_\ell}$ の外部で $\boldsymbol{W}(x)$ とおくことにより $\boldsymbol{R}^N$ 上の関数に拡張してそれを改めて $\boldsymbol{u}^{(\ell)}$ で表す. このとき,

(2.3) $$\boldsymbol{V} \leq \boldsymbol{u}^{(\ell)} \leq \boldsymbol{W} \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N, \ell = 1, 2, \cdots.$$

従って $\{\boldsymbol{u}^{(\ell)}\}$ は $\boldsymbol{R}^N$ 上で局所的に一様有界である. 今, $m \in \boldsymbol{N}$ に対して, $\ell \geq m+3$ とすると, $\boldsymbol{u}^{(\ell)}$ は

(2.4) $$L_k u_k^{(\ell)} = f_k(x, \boldsymbol{u}^{(\ell)}, Du_k^{(\ell)}) \qquad \text{in } B_{m+3}, \ k = 1, \cdots, M$$

を満たすから Ladyzenskaya-Ural'seva[11] の定理 3.1 を用いて

(2.5) $$\max\{|Du_k^{(\ell)}(x)|; x \in \overline{B}_{m+2}, k = 1, \cdots, M\} \leq K_1$$

を得る. ここで, K_1 は ℓ に依存しない定数である. 更に, L^p-評価を用いると

(2.6) $$\|u_k^{(\ell)}\|_{2,p,m+1} \leq K_2 \left(\|f_k(x, \boldsymbol{u}^{(\ell)}, Du_k^{(\ell)})\|_{0,p,m+2} + \|u_k^{(\ell)}\|_{0,p,m+2} \right), \quad k = 1, \cdots, M.$$

ここで, $\|\cdot\|_{j,p,m}$ は Sobolev 空間 $W^{j,p}(B_m)$ におけるノルムを表し, K_2 は ℓ によらない定数である. (2.3) と (2.5) から (2.6) の右辺は $\ell \geq m+3$ に対して一様に有界である. 従って p を $p > N/(1-\theta)$ にとると Sobolev の定理から $\{\boldsymbol{u}^{(\ell)}\}_{\ell \geq m+3}$ は $C^{1+\theta}(\overline{B}_{m+1}; \boldsymbol{R}^M)$ で有界である. この事と $u_k^{(\ell)}$ を線形方程式 (2.4) の解とみて Schauder の内部評価を適用することにより $\{\boldsymbol{u}^{(\ell)}\}_{\ell \geq m+3}$ は $C^{2+\theta}(\overline{B_m}; \boldsymbol{R}^M)$ における有界列である. $m \geq 1$ は任意だから

Ascoli-Arzela の定理を用いて $\{u^{(\ell)}\}$ の部分列を選んで $\boldsymbol{R}^N$ の任意のコンパクト集合上でそれらの 2 階偏導関数まで込めて関数 $u \in C^{2+\theta}(\boldsymbol{R}^N; \boldsymbol{R}^M)$ に一様収束するように出来る．この u は (1.1) の所要の解である．

系 2.1. 定理 2.1 の仮定の下で，特に各 f_k が $u_j, j \neq k$, について非減少とする．このとき，条件 (2.2), (2.3) をそれぞれ

$$L_k V_k \leq f_k(x, \boldsymbol{V}, DV_k), \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N,\ k = 1, \cdots, M, \tag{2.2$'$}$$

$$L_k W_k \geq f_k(x, \boldsymbol{W}, DW_k), \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N,\ k = 1, \cdots, M \tag{2.3$'$}$$

で置き換えることによって定理 2.1 の主張が成り立つ．

系 2.2. 定理 2.1 の仮定の下で，特に各 f_k が $u_j, j \neq k$, について非増加とする．このとき，条件 (2.2), (2.3) をそれぞれ

$$L_k V_k \leq f_k(x, W_1, \cdots, W_{k-1}, V_k, W_{k+1}, \cdots, W_M, DV_k), \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N,\ k = 1, \cdots, M, \tag{2.2$''$}$$

$$L_k W_k \geq f_k(x, V_1, \cdots, V_{k-1}, W_k, V_{k+1}, \cdots, V_M, DW_k), \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N,\ k = 1, \cdots, M, \tag{2.3$''$}$$

で置き換えることによって定理 2.1 の主張が成り立つ．

注意 2.1. $L_k = -\Delta$ (N-次元ラプラシアン) で f_k が Du_k に依存しないときは，系 2.1 は Kawano[6], Kusano-Swanson[9] によって，また系 2.2 は $M = 2$ のとき Kawano[6] によって証明されている．(有界領域の場合は Sattinger[15]).

3. 正値全域解の存在

3.1. 以下の議論では記号の簡単化のために $L_k = -\Delta + c_k(x)\cdot$ (Δ は N 次元ラプラシアン) として，次の方程式系を考える (一般の L_k に対する結果は [4] を参照.):

$$-\Delta u_k + c_k(x)u_k = \lambda f_k(x, \boldsymbol{u}, Du_k) \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N, N \geq 3,\ k = 1, \cdots, M. \tag{3.1}$$

ここで，$M \geq 2$, λ は実パラメタである. この節では単独方程式のときのように，(3.1) に対して無限遠である正定ベクトルに収束する正値全域解と $\boldsymbol{0}$ に減衰する正値全域解が存在するための十分条件を与える.

この節以降 $\boldsymbol{R}^N$ 上の連続関数 h に対して記号 $h^*(r) = \max_{|x|=r} |h(x)|, r > 0$ を用いる.

$\boldsymbol{f}$ に対しては (F_1) の他に次の仮定をおく：

(F_2) 次を満たすような関数 $G \in C^\theta_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^N; \boldsymbol{R}_+) \cap L^\infty(\boldsymbol{R}^N)$ と定数 $J_0 > 0$ が存在する:

$$|f_k(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})| \leq G(x),\ x \in \boldsymbol{R}^N,\ |\boldsymbol{u}|,\ |\boldsymbol{p}| \leq J_0,$$

$$\int^\infty rG^*(r)\, dr < \infty,$$

(F_3) 各 $k = 1, \cdots, M$ に対して，次の (i), (ii) を満たすような開集合Ω_k ($\subset \boldsymbol{R}^N$) と定数 $J_1 > 0, \gamma \in (0, 1)$ が存在する：

(i) $f_k(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) \geq 0 \quad \text{for } x \in \boldsymbol{R}^N, \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{u} \leq J_1\boldsymbol{1},\ |\boldsymbol{p}| \leq J_1,$

ここで，$\boldsymbol{1} = (1, \cdots, 1) \in \boldsymbol{R}^M$,

(ii) $\displaystyle\liminf_{t\to+0} \frac{f_k(x, u_1, \cdots, u_{k-1}, t, u_{k+1}, \cdots, u_m, \boldsymbol{p})}{t^\gamma} \geq M > 0$

uniformly in $(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})$ with $x \in \Omega_k,\ 0 < u_j \leq J_1, j \neq k, |\boldsymbol{p}| \leq J_1$.

我々は次の定理を得る.

定理 3.1. $c_k \in C^{\theta}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^N;\overline{\boldsymbol{R}}_+)$ とし，$(\mathrm{F}_1), (\mathrm{F}_2)$ を仮定する．このとき，

$$\int^{\infty} r c_k^*(r) < \infty, \qquad k = 1, \cdots, M \tag{3.2}$$

ならば，任意の $|\lambda| < \lambda^*$ に対して (3.1) が

$$\exists \lim_{|x|\to\infty} u(x) = \xi > 0 \tag{3.3}$$

となる正値全域解 u を持つような $\lambda^* > 0$ が存在する．更に，各 λ に対してこのような解 u は無限個存在する．

定理 3.2. $c_k \in C^{\theta}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^N;\overline{\boldsymbol{R}}_+)$ とし (F_1)-(F_3) を仮定する．このとき，任意の $\lambda \in (0,\ \lambda^*)$ に対して (3.1) が $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = \boldsymbol{0}$ となる正値全域解 u を持つような $\lambda^* > 0$ が存在する．

これらの定理は 定理 2.1 を用いて証明されるが，定理 2.1 の $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ の構成には線形方程式の正値解の存在とその挙動が有効である．

補題 3.1([3]). $c \in C^{\theta}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^N;\overline{\boldsymbol{R}}_+), G \in C^{\theta}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^N) \cap L^{\infty}(\boldsymbol{R}^N)$ とする．更に，

$$\int^{\infty} r c^*(r) dr < \infty, \qquad \int^{\infty} r G^*(r) dr < \infty \tag{3.3}$$

とする．このとき，任意の $\zeta \in \boldsymbol{R}$ に対して問題

$$\begin{aligned} -\Delta u + c(x)u &= G(x) \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N, \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) &= \zeta \end{aligned}$$

の一意的な解 $u \in C^{2+\theta}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^N)$ が存在する．

更に，$\|u\|_1 \equiv \sup_{x\in R^N}\{|u(x)| + |Du(x)|\} < \infty$ であって，次が成り立つ：

(i) $G \geq 0,\ \zeta \geq 0$ であるか，又は$\zeta > 0$ が十分大きいときは $\boldsymbol{R}^N$ 上で $u(x) > 0$．但し，$\zeta = 0$ のときは $G \not\equiv 0$ とする．

(ii) $\zeta = 0$ のときは，(3.3) における c に対する積分条件は必要でない．

また，特に $\zeta = 0, c(x) \equiv 0$ の場合には，

$$\int^{\infty} r^{N-1} G^*(r) dr < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad u(x) = O(|x|^{2-N})\ (|x| \to \infty).$$

定理 3.1 の証明． 補題 3.1 から，各 k に対して次のような関数 $v_k, w_k \in C^{2+\theta}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^N)$ が存在する：

$$-\Delta v_k + c_k(x) v_k = -G(x) \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N, \tag{3.4}$$

$$-\Delta w_k + c_k(x) w_k = G(x) \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N, \tag{3.5}$$

$$\exists \lim_{|x|\to\infty} v_k(x) = \exists \lim_{|x|\to\infty} w_k(x) = \zeta > 0, \quad 0 < v_k \le w_k \text{ in } \boldsymbol{R}^N. \tag{3.6}$$

ここで，$\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_M), \boldsymbol{w} = (w_1, \cdots, w_M), \lambda^* = J_0/\max\{\|\boldsymbol{v}\|_1, \|\boldsymbol{w}\|_1\}$ とおく．$\lambda \in (0,\ \lambda^*)$ に対して (3.1) の求める解の存在を示せば十分である．$\lambda \in (0,\ \lambda^*)$ とし，任意の $\xi' \in (\lambda,\ \lambda^*)$ に対して，$\boldsymbol{V} = \xi' \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{W} = \xi' \boldsymbol{w}$ とおく．このとき，$\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ は 定理 2.1 の (2.2), (2.3) を満たす．実際，$V_j(x) \le \sigma_j \le W_j(x), j \ne k, \sigma_k = V_k(x)$ を満たす任意の $\boldsymbol{\sigma}$ に対して

$$-\Delta V_k(x) + c_k(x) V_k(x) = -\xi' G(x) \le -\lambda G(x) \le -\lambda f_k(x, \boldsymbol{\sigma}, DV_k(x)),\ x \in \boldsymbol{R}^N.$$

即ち $\boldsymbol{V}$ は (2.2) を満たす．$\boldsymbol{W}$ についても同様に示される．従って，定理 2.1 から $\boldsymbol{R}^N$ 上で $\boldsymbol{0} < \boldsymbol{V} \le \boldsymbol{u} \le \boldsymbol{W}$ を満たす (3.1) の解 $\boldsymbol{u} \in C^{2+\theta}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^N; \boldsymbol{R}^M)$ が存在する．明らかに $\lim_{|x|\to\infty} \boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{\xi} \equiv \xi' \zeta \boldsymbol{1}$. を満たす．

定理 3.2 の証明． 補題 3.1 から，$\lim_{|x|\to\infty} w_k(x) = 0$ を満たすような (3.5) の正値全域解 $w_k \in C^{2+\theta}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^N)$ が存在する．$\lambda^* = \min\{J_0, J_1\}/\|\boldsymbol{w}\|_1$ にとる．任意の $\lambda \in (0,\ \lambda^*)$ に対して，$\boldsymbol{W} = \lambda \boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$ とおいた (2.3) を満たすことが 定理 3.1 の証明と同様に示される．

$\boldsymbol{V}$ の構成について．(F_3) の (ii) から，$\delta \in (0,\ J_1]$ を十分小さくとると $x \in \Omega_k, 0 < u_j \leq J_1, j \neq k, |\boldsymbol{p}| \leq J_1$ のとき

$$(3.7) \qquad 0 < t \leq \delta \quad \Longrightarrow f_k(x, u_1, \cdots, u_{k-1}, t, u_{k+1}, \cdots, u_M, \boldsymbol{p}) \geq \frac{M}{2} t^\gamma.$$

このような δ をとって固定する．更に，$G_{k0} \in C_0^\theta(\boldsymbol{R}^N)$ を supp $G_{k0} \subset \Omega_k$ かつ

$$0 \leq G_{k0}(x) \leq \min\{\lambda G(x), M/2\} \quad \text{for } x \in \text{ supp } G_{k0}$$

なるようにとる．再び 補題 3.1 より

$$\begin{aligned} -\Delta v_k + c_k(x) v_k &= G_{k0}(x),\ v_k > 0 \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N, \\ \lim_{|x| \to \infty} v_k(x) &= 0, \quad k = 1, \cdots, M \end{aligned}$$

となる $v_k \in C_{\mathrm{loc}}^{2+\theta}(\boldsymbol{R}^N)$ が存在する．更に，$\boldsymbol{R}^N$ 上で $G_{k0}(x) \leq \lambda G(x)$ だから最大値の原理によって $0 < v_k(x) \leq W_k(x)$．今，$K = \min_{1 \leq k \leq M} \min\{v_k(x); x \in \mathrm{supp} G_{ko}\}$ とおき，

$$\mu = \min\{1, (\lambda K^\gamma)^{1/(1-\gamma)}, \delta / \|\boldsymbol{v}\|_1\}$$

にとると，$\boldsymbol{R}^N$ 上で $0 \leq \mu v_k(x) \leq \delta$ だから (3.7) より $\boldsymbol{V} = \mu \boldsymbol{v}$ は次を満たす．

$$\begin{aligned} -\Delta V_k + c_k(x) V_k &= \mu G_{k0}(x) \leq (M/2)(\mu v_k(x))^{-\gamma} (\mu v_k(x))^\gamma \\ &= (M/2) \mu^{1-\gamma} (v_k(x))^{-\gamma} V_k(x)^\gamma \leq \lambda f_k(x, \boldsymbol{\sigma}, DV_k(x)), \quad x \in \boldsymbol{R}^N \\ &\text{for } \boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{R}^M \text{ s.t. } 0 < \sigma_j \leq J_1, j \neq k, \sigma_k = V_k(x), k = 1, \cdots, M. \end{aligned}$$

$\boldsymbol{R}^N$ 上で $\boldsymbol{0} < \boldsymbol{V} \leq \boldsymbol{W} \leq J_1 \boldsymbol{1}$ だから，定理 3.2 は定理 2.1 から従う．

定理 3.1 と 3.2 の証明を組み合わせることによって次の系を得る．

系 3.1. (H_1), (H_2), (F_1), (F_2) 及び (3.2) を仮定する．$\mathcal{K} \subset \{1, \cdots, M\}$ を $k \in \mathcal{K}$ に対して (F_3) が成り立つような添数 k の集合とする．このとき，任意の $\lambda \in (0,\ \lambda^*)$ に対して

(3.1) が

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \cdots, \xi_M),\ \xi_k = 0 \text{ for } k \in \mathcal{K},\ \xi_k > 0 \text{ for } k \notin \mathcal{K}$$

となる正値全域解 $\boldsymbol{u}$ を持つような $\lambda^* > 0$ が存在する．更に，各 λ に対してこのような解 $\boldsymbol{u}$ は無限個存在する．

注意 3.1. 定理 3.1, 3.2 における λ^* は一般に有限値である．しかし，$\boldsymbol{f}$ の各成分 f_k がすべて sublinear か superlinear であれば $\lambda^* = \infty$ となる．(注意 3.2 の (i) を参照)

3.2. ここでは上の 2 つの定理の応用として典型的な 2 つの例を挙げる．

例 3.1. 次の Emden-Fowler 型の方程式系を考える：

$$-\Delta u_k + c_k(x)u_k = \lambda\left(\sum_{\ell=1}^{M} p_{k\ell}(x)u_\ell^{\gamma_{k\ell}} + q_k(x)|Du_k|^{\delta_k}\right) \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N,\ k = 1, \cdots, M. \tag{3.8}$$

ここで，c_k，$p_{k\ell}$，$q_k \in C^\theta_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^N), 0 < \theta < 1, c_k(x) \geq 0$ とし，$\gamma_{k\ell} \geq 0, 0 \leq \delta_k \leq 2$ とする．更に，

$$\int^\infty r p^*_{k\ell}(r)dr < \infty, \qquad \int^\infty r q^*_k(r)dr < \infty, \quad k, \ell = 1, \cdots, M \tag{3.9}$$

を仮定する．このとき，

$$f_k(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) \equiv \sum_{\ell=1}^{M} p_{k\ell}(x)u_\ell^{\gamma_{k\ell}} + q_k(x)|\boldsymbol{p}|^{\delta_k}, \quad k = 1, \cdots, M$$

とおくと，$\boldsymbol{f} = (f_1, \cdots, f_M)$ は (F_1) を満たす．また，この $\boldsymbol{f}$ に対して $G(x) = \sum_{k,\ell=1}^{M} |p_{k\ell}(x)| + \sum_{k=1}^{M} |q_k(x)|$ にとることにより (3.9) から (F_2) も満たされる．更に，

$$p_{k\ell} \geq 0,\ p_{kk} \not\equiv 0,\ q_k \geq 0,\ \text{かつ } 0 \leq \gamma_{kk} < 1,\ k, \ell = 1, \cdots, M \tag{3.10}$$

ならば (F_3) が満たされる．従って，定理 3.1 と定理 3.2 から次のことが分かる．

(i) 定理 3.1 から，(3.9) と条件

$$\int^{\infty} rc_k^*(r)dr < \infty, \quad k = 1, \cdots, M$$

の下で，$|\lambda| < \lambda^*$ の各 λ に対して (3.8) が

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = \xi \qquad \text{for some} \quad \xi > 0 \tag{3.11}$$

となる正値全域解 u を持つような $\lambda^* > 0$ が存在する．更に，各 λ に対してこのような解 u は無限個存在する．

(ii) 定理 3.2 から，(3.9), (3.10) の下で， $\lambda \in (0,\ \lambda^*)$ に対して (3.8) が $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$ となる正値全域解 u を持つような $\lambda^* > 0$ が存在する．

注意 3.2. (i) $0 \leq \gamma_{k\ell},\ \delta_k < 1, k, \ell = 1, \cdots, M$ (このとき (3.8) は sublinear とよばれる)，又は $\gamma_{k\ell},\ \delta_k > 1, k, \ell = 1, \cdots, M$ (このとき (3.8) は superlinear とよばれる) ならば例 3.1 の (i) の主張は任意の$\lambda \in \boldsymbol{R}$ について成り立つ．同じく sublinear の場合は (ii) の主張は任意の$\lambda > 0$ について成り立つ．

(ii) 例 3.1 は $c_k = 0, p_{k\ell} \geq 0, q_k = 0, k, \ell = 1, \cdots, M$ のとき Kusano-Swanson [9] で考察されている．

例 3.2. $\Phi, \Psi \in C^\theta_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^N) \cap L^\infty(\boldsymbol{R}^N), 0 < \theta < 1$ とし，$p_{ij}, \alpha, \beta, \gamma, \mu, \sigma$ は非負の定数として次の方程式系を考える：

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\Phi(x)u^\alpha(1 - p_{11}u^\beta - p_{12}v^\gamma) \\ \\ -\Delta v = \lambda\Psi(x)v^\mu(1 + p_{21}u^\nu - p_{22}v^\sigma) \end{cases} \quad \text{in} \quad \boldsymbol{R}^N, \quad N \geq 3. \tag{3.12}$$

特に $\beta, \gamma, \nu, \sigma$ は正数とし，Φ, Ψ は

$$\int^{\infty} r(\Phi^*(r) + \Psi^*(r))dr < \infty \tag{3.13}$$

を満たすとする．このとき

$$
(3.14) \qquad \begin{cases} f_1(x,u,v) = \Phi(x)u^{\alpha}(1-p_{11}u^{\beta}-p_{12}v^{\gamma}) \\ \\ f_2(x,u,v) = \Psi(x)v^{\mu}(1+p_{21}u^{\nu}-p_{22}v^{\sigma}) \end{cases} \qquad \text{for} \quad (x,u,v) \in \boldsymbol{R}^N \times \overline{\boldsymbol{R}}_+^2
$$

で定義される $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ は $G(x) = |\Phi(x)| + |\Psi(x)|$ にとることにより (F_1), (F_2) を満たす．従って，

$$
(3.15) \qquad \lim_{|x|\to\infty} u(x) = \xi, \qquad \lim_{|x|\to\infty} v(x) = \eta
$$

となる (3.12) の正値全域解の存在について次のことが成り立つ．

(i) 定理 3.1 から，$|\lambda| < \lambda^*$ のとき，ある $\xi > 0, \eta > 0$ に対して (3.12) が (3.15) を満たす正値全域解 $\boldsymbol{u}$ 持つような $\lambda^* > 0$ が存在する．

(ii) $\boldsymbol{R}^N$ 上で $\Phi(x) > 0, \Psi(x) > 0$ とし，$\alpha < 1, \mu < 1$ とする．定理 3.2 から $\lambda \in (0, \lambda^*)$ のとき，(3.12) が $\xi = \eta = 0$ とした (3.15) を満たす正値全域解 $\boldsymbol{u}$ を持つような $\lambda^* > 0$ が存在する．

(iii) $\boldsymbol{R}^N$ 上で $\Phi(x) > 0$ で $\alpha < 1$（又は $\Psi(x) > 0, \mu < 1$）とする．このとき，系 3.1 から $\lambda \in (0, \lambda^*)$ に対して (3.12) が $\xi = 0, \eta > 0$（又は $\xi > 0, \eta = 0$）とした (3.15) を満たす正値全域解を持つような $\lambda^* > 0$ が存在する．

4. Singular semilinear system の正値全域解

この節では $\boldsymbol{f}$ が単調性を満たさない簡単な例として singular な非線形性を持つ次の方程式の正値全域解の存在について定理 2.1 の適用を考える．

$$
(4.1) \qquad -\Delta u_k = \left(\sum_{\ell=1}^{M} p_{k\ell}(x) u_\ell^{\gamma_{k\ell}} + \sum_{\ell=1}^{M} q_{k\ell}(x) u_\ell^{-\delta_{k\ell}} \right) \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N, k = 1, \cdots, M
$$

ここで，$p_{k\ell}, q_{k\ell} \in C^{\theta}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^N), 0 \le \gamma_{k\ell} < 1, \delta_{k\ell} \ge 0, k, \ell = 1, \cdots, M,$ とする．$p_{k\ell}$，$q_{k\ell}$ に対しては次の積分条件のいずれかを仮定する．

$$
(4.2) \qquad \int^{\infty} r p^*_{k\ell}(r) dr < \infty, \quad k, \ell = 1, \cdots, M,
$$

$$\int^{\infty} r^{N-1-(N-2)\gamma_{k\ell}} p^*_{k\ell}(r)dr < \infty, \quad k, \ell = 1, \cdots, M, \tag{4.3}$$

$$\int^{\infty} r q^*_{k\ell}(r)dr < \infty, \quad k, \ell = 1, \cdots, M, \tag{4.4}$$

$$\int^{\infty} r^{1+(N-2)\delta_{k\ell}} q^*_{k\ell}(r)dr < \infty, \quad k, \ell = 1, \cdots, M, \tag{4.5}$$

$$\int^{\infty} r^{N-1+(N-2)\delta_{k\ell}} q^*_{k\ell}(r)dr < \infty, \quad k, \ell = 1, \cdots, M. \tag{4.6}$$

$q_{k\ell} \not\equiv 0$ のときは前節の条件 (F_2) が満たされないので定理 3.1, 3.2 を適用できない．しかし我々は次の命題を得る．

命題 4.1. (i) (4.2), (4.4) の下で，(4.1) は $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = \xi > 0$ となる正値全域解 u を無限個持つ．

(ii) $\boldsymbol{R}^N$ 上で $p_{k\ell} \geq 0$, $q_{k\ell} \geq 0$, $k, \ell = 1, \cdots, M$, とし，特に，各 k について $p_{kk} \not\equiv 0$ 又は $q_{kk} \not\equiv 0$ とする．このとき，(4.2), (4.5) の下で (4.1) は $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$ となる正値全域解 u を持つ．

(iii) (ii) で (4.2), (4.5) のかわりに (4.3), (4.6) を仮定すると，(4.1) は

$$K^{-1}|x|^{2-N} \leq u_k(x) \leq K|x|^{2-N}, \quad |x| > 1, \quad k = 1, \cdots, M \quad \text{for some } K > 1$$

を満たすような正値全域解 u を持つ．

証明 (i) 定理 2.1 を適用するためには $0 < \boldsymbol{V} \leq \boldsymbol{W}$ かつ

$$\begin{cases} -\Delta V_k \leq -\left(\sum_{\ell=1}^{M} |p_{k\ell}(x)| W_\ell^{\gamma_{k\ell}} + \sum_{\ell=1}^{M} |q_{k\ell}(x)| V_\ell^{-\delta_{k\ell}}\right) \\ -\Delta W_k \geq \left(\sum_{\ell=1}^{M} |p_{k\ell}(x)| W_\ell^{\gamma_{k\ell}} + \sum_{\ell=1}^{M} |q_{k\ell}(x)| V_\ell^{-\delta_{k\ell}}\right) \end{cases} \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N \tag{4.7}$$

を満たすような $\boldsymbol{V} = (V_1, \cdots, V_M), \boldsymbol{W} = (W_1, \cdots, W_M) \in C^{2+\theta}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^N; \boldsymbol{R}^M)$ を構成すればよいことを注意する．

$G(x)=\sum_{k,\ell=1}^{M}(|p_{k\ell}(x)|+|q_{k\ell}(x)|)$ とおくと補題 3.1 から十分大きい $\zeta>0$ に対して

$$(4.8)\qquad \begin{cases} -\Delta v=-G(x) \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N, & \displaystyle\lim_{|x|\to\infty} v(x)=\zeta, \\ -\Delta w=G(x) \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N, & \displaystyle\lim_{|x|\to\infty} w(x)=\zeta \end{cases}$$

の正値全域解 v,w が存在する．更に，最大値の原理によって $\boldsymbol{R}^N$ において $v(x)\le w(x)$ であることを注意する．$\kappa>0$ を

$$\kappa\ge\left(\sup_{x\in R^N} w(x)\right)^{\gamma_{k\ell}/(1-\gamma_{k\ell})}, \quad \kappa\ge\left(\inf_{x\in R^N} v(x)\right)^{-\delta_{k\ell}/(1+\delta_{k\ell})} \qquad k,\ell=1,\cdots,M$$

即ち

$$\kappa\ge(\kappa w(x))^{\gamma_{k\ell}}, \quad \kappa\ge(\kappa v(x))^{-\delta_{k\ell}} \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N,\ k,\ell=1,\cdots,M$$

を満たすように大きくとると，$\boldsymbol{R}^N$ 上で $\boldsymbol{V}(x)=\kappa v(x)\mathbf{1}, \boldsymbol{W}(x)=\kappa w(x)\mathbf{1}$ で定義された $\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}$ は (4.7) を満たす．実際

$$\begin{aligned} -\Delta V_k(x) &= -\kappa G(x) \\ &\le -\kappa\left(\sum_{\ell=1}^{M}|p_{k\ell}(x)|+\sum_{\ell=1}^{M}|q_{k\ell}(x)|\right) \\ &\le -\left(\sum_{\ell=1}^{M}|p_{k\ell}(x)|(\kappa w(x))^{\gamma_{k\ell}}+\sum_{\ell=1}^{M}|q_{k\ell}(x)|(\kappa v(x))^{-\delta_{k\ell}}\right) \\ &= -\left(\sum_{\ell=1}^{M}|p_{k\ell}(x)|W_\ell(x)^{\gamma_{k\ell}}+\sum_{\ell=1}^{M}|q_{k\ell}(x)|V_\ell(x)^{-\delta_{k\ell}}\right), \\ & \qquad\qquad\qquad x\in\boldsymbol{R}^N,\ k=1,\cdots,M. \end{aligned}$$

従って，$\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}$ は (4.7) の第一の関係式を満たす．同様にして第二の関係式が満たされることも示される．明らかに $\boldsymbol{R}^N$ で $\mathbf{0}<\boldsymbol{V}\le\boldsymbol{W}$ で，$\lim_{|x|\to\infty}\boldsymbol{V}(x)=\lim_{|x|\to\infty}\boldsymbol{W}(x)=\kappa\zeta\mathbf{1}$．故に定理 2.1 から (i) の結論を得る．

(ii)　(ii) の証明のためには $\mathbf{0}<\boldsymbol{V}\le\boldsymbol{W}$ かつ

$$(4.9)\qquad \begin{cases} -\Delta V_k\le p_{kk}(x)V_k^{\gamma_{kk}}+\displaystyle\sum_{\ell\ne k}p_{k\ell}(x)V_\ell^{\gamma_{k\ell}}+q_{kk}(x)V_k^{-\delta_{kk}}+\sum_{\ell\ne k}q_{k\ell}(x)W_\ell^{-\delta_{k\ell}} \\ -\Delta W_k\ge p_{kk}(x)W_k^{\gamma_{kk}}+\displaystyle\sum_{\ell\ne k}p_{k\ell}(x)W_\ell^{\gamma_{k\ell}}+q_{kk}(x)W_k^{-\delta_{kk}}+\sum_{\ell\ne k}q_{k\ell}(x)V_\ell^{-\delta_{k\ell}} \end{cases} \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N$$

を満たし, $\lim_{|x|\to\infty} \boldsymbol{V}(x) = \lim_{|x|\to\infty} \boldsymbol{W}(x) = \boldsymbol{0}$ となる関数 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ を求めればよい.

まず $\boldsymbol{V}$ を構成しよう. そのために $g_k \in C_0^\theta(\boldsymbol{R}^N)$ を次のようにとる:

$$\begin{cases} 0 \le g_k(x) \le p_{kk}(x) \quad \text{in} \quad \boldsymbol{R}^N & \text{if} \quad p_{kk} \not\equiv 0, \\ 0 \le g_k(x) \le q_{kk}(x) \quad \text{in} \quad \boldsymbol{R}^N & \text{if} \quad p_{kk} \equiv 0. \end{cases}$$

そのとき, $v_k \in C_{\mathrm{loc}}^{2+\theta}(\boldsymbol{R}^N)$ を方程式

$$-\Delta v = g_k(x) \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N$$

の正値全域解で

$$K^{-1}|x|^{2-N} \le v_k(x) \le K|x|^{2-N}, \quad |x| \ge 1 \quad \text{for some} \quad K > 1 \tag{4.10}$$

を満たすものとする. このような v_k は補題 3.1 の (iii) から存在する. 今, $\overline{\Omega_k} = \operatorname{supp} g_k$ とおき, $\kappa > 0$ を

$$0 < \kappa \le \left(\min_{x\in\overline{\Omega}_k} v_k(x)\right)^{\gamma_{kk}/(1-\gamma_{kk})} \qquad \text{if} \qquad p_{kk} \not\equiv 0,$$
$$0 < \kappa \le \left(\sup_{x\in R^N} v_k(x)\right)^{-\delta_{kk}/(1+\delta_{kk})} \qquad \text{if} \qquad p_{kk} \equiv 0$$

にとると $V_k = \kappa v_k$ は次を満たす.

$p_{kk} \not\equiv 0$ なる k に対しては

$$\begin{aligned} -\Delta V_k(x) &= \kappa g_k(x) = \kappa g_k(x)(\kappa v_k(x))^{\gamma_{kk}}(\kappa v_k(x))^{-\gamma_{kk}} \\ &\le \kappa^{1-\gamma_{kk}} \left(\min_{x\in\overline{\Omega}_k} v_k(x)\right)^{-\gamma_{kk}} p_{kk}(x) V_k(x)^{\gamma_{kk}} \\ &\le p_{kk}(x) V_k(x)^{\gamma_{kk}}, \qquad x \in \Omega_k, \\ -\Delta V_k(x) &= 0 \le p_{kk}(x) V_k(x)^{\gamma_{kk}}, \qquad x \notin \Omega_k, \end{aligned}$$

$p_{kk} \equiv 0$ なる k に対しては

$$-\Delta V_k(x) = \kappa g_k(x) = \kappa g_k(x)(\kappa v_k(x))^{-\delta_{kk}}(\kappa v_k(x))^{\delta_{kk}}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \kappa^{1+\delta_{kk}} \left(\sup_{x \in R^N} v_k(x) \right)^{\delta_{kk}} q_{kk}(x) V_k(x)^{-\delta_{kk}} \\
&\le q_{kk}(x) V_k(x)^{-\delta_{kk}}, \qquad x \in \Omega_k, \\
-\Delta V_k(x) &= 0 \le q_{kk}(x) V_k(x)^{-\delta_{kk}}, \qquad x \notin \Omega_k.
\end{aligned}
$$

従って，いずれにしても V_k は (4.9) の第一式を満たす．

次に $\boldsymbol{W}$ を構成する．そのために上で得られた $\boldsymbol{V}$ に対して

$$
(4.11) \qquad -\Delta w_k = \sum_{\ell=1}^{M} p_{k\ell}(x) w_\ell^{\gamma_{k\ell}} + \sum_{\ell=1}^{M} q_{k\ell}(x) V_\ell(x)^{-\delta_{k\ell}} \quad \text{in} \quad \boldsymbol{R}^N, k = 1, \cdots, M
$$

を考える．$\tilde{q}_{k\ell}(x) = q_{k\ell}(x) V_\ell(x)^{-\delta_{k\ell}}$ とおくと (4.10) から $0 \le \tilde{q}^*_{k\ell}(r) \le K_1 q^*_{k\ell}(r) r^{(N-2)\delta_{k\ell}}$, $r \ge 1$ だから，条件 (4.5) より

$$
(4.12) \qquad \int^{\infty} r \tilde{q}^*_{k\ell}(r) dr < \infty, \quad k, \ell = 1, \cdots, M.
$$

従って，例 3.1 の (ii)（及び注意 3.2 の (i)）から $|x| \to \infty$ のとき $\boldsymbol{0}$ に収束するような (4.11) の正値全域解 $\boldsymbol{w}$ が存在する．またこの $\boldsymbol{w}$ の各成分は $|x| \ge 1$ において $w_k(x) \ge \text{const.} |x|^{2-N}$ を満たすことに注意すると，$\mu \ge 1$ を $\boldsymbol{R}^N$ で $\boldsymbol{V} \le \mu \boldsymbol{w}$ となるようにとれる．このような μ に対して $\boldsymbol{W} = \mu \boldsymbol{w}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
-\Delta W_k(x) &= \mu \left(\sum_{\ell=1}^{M} p_{k\ell}(x) w_k(x)^{\gamma_{k\ell}} + \sum_{\ell=1}^{M} q_{k\ell}(x) V_\ell(x)^{-\delta_{k\ell}} \right) \\
&= \sum_{\ell=1}^{M} p_{k\ell}(x) W_k(x)^{\gamma_{k\ell}} \mu^{1-\gamma_{k\ell}} + \mu \sum_{\ell=1}^{M} q_{k\ell}(x) V_\ell(x)^{-\delta_{k\ell}} \\
&\ge \sum_{\ell=1}^{M} p_{k\ell}(x) W_k(x)^{\gamma_{k\ell}} + \sum_{\ell \ne k}^{M} q_{k\ell}(x) V_\ell(x)^{-\delta_{k\ell}} + q_{kk}(x) W_k(x)^{-\delta_{kk}} \quad \text{in} \quad \boldsymbol{R}^N.
\end{aligned}
$$

このように $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ は (4.9) を満たすことがチェックされた．従って，定理 2.1 から $\boldsymbol{R}^N$ で $\boldsymbol{V} \le \boldsymbol{u} \le \boldsymbol{W}$ となるような (4.1) の正値全域解 $\boldsymbol{u}$ が存在する．$\lim_{|x| \to \infty} \boldsymbol{V}(x) = \lim_{|x| \to \infty} \boldsymbol{W}(x) = \boldsymbol{0}$ であるから $\lim_{|x| \to \infty} \boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{0}$ となることは明らか．

(iii) $\boldsymbol{V}$ は (ii) の証明と同じとする．(ii) の証明の中の記号 $\tilde{q}^*_{k\ell}$ を用いると，条件 (4.5) の下で，$\int^\infty r^{N-1}\tilde{q}^*_{k\ell}(r)dr < \infty$．この事と条件 (4.3) から (4.11) は (4.10) の型の不等式を満たすような正値全域解 w を持つ ([9; 定理 1.2])．従って，(ii) の証明の $\boldsymbol{V}$ も $\boldsymbol{W}$ も (4.10) を満たすような関数としてよいから (iii) が成り立つ．

注意 4.1. $m = 1$, $p_{11} \equiv 0$ の場合，(iii) は $\delta_{11} < 1$ のとき Kusano-Swanson[8] によって，$\delta_{11} > 0$ のときに Dalmasso[2] によってそれぞれ考察されている（[5] も参照）．我々の結果はそれらの拡張で，$\delta_{k\ell} \geq 1$ の場合の証明は Dalmasso の証明に比べて簡単である．

参考文献

[1] K. Akô and T.Kusano, On bounded solutions of second order elliptic differential equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I, **11**(1964), 29-37.

[2] R. Dalmasso, Solutions d'équations elliptiques semi-linéaires singulières, Ann. Mat. Pura Appl. (IV), **153**(1988), 191-202.

[3] Y. Furusho, Existence of global positive solutions of quasilinear elliptic equations in unbounded domains, Funkcial. Ekvac.,**32**(1989), 227-242.

[4] Y. Furusho, Existence of positive entire solutions for weakly coupled semilinear elliptic systems, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **120A** (1992), to appear.

[5] Y. Furusho, Note on singular elliptic equations, Hiroshima Math. J., to appear.

[6] N. Kawano, On bounded entire solutions of semilinear elliptic equations, Hiroshima Math. J.,**14**(1984),125-158.

[7] N. Kawano and T. Kusano, On positive solutions of a class of second order semilinear elliptic systems, Math. Z.,**186**(1984),287-297.

[8] T. Kusano and C. A. Swanson, Entire positive solutions of singular semilinear elliptic equations, Japan. J. Math., **11**(1985), 145-155.

[9] T. Kusano and C. A. Swanson, A general method for quasilinear elliptic problems in $\boldsymbol{R}^N$, J. Math. Anal. Appl., to appear.

[10] G. S. Ladde, V. Lakshmikantham and A. S. Vatsala, *Monotone iterative techniques for nonlinear differential equations*, Pitman, Boston-London-Melbourne, 1985.

[11] O. A. Ladyzenskaya and N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations,* English translation, Academic Press, New York and London, 1968.

[12] A. W. Leung, *Systems of nonlinear partial differential equations,Applications to Biology and Engineering,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1989.

[13] A. W. Leung and G. Fan, Existence of positive solutions for elliptic systems - Degenerate and nondegenerate ecological models, J. Math. Anal. Appl., **151**(1990), 512-531.

[14] E. S. Noussair and C. A. Swanson, Positive solutions of elliptic systems with bounded nonlinearities, Proc. Royal Soc. Edinburgh.,**108A**(1988), 321-332.

[15] D. Sattinger, Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems, Indiana Univ. Math. J.,**21**(1972), 979-1000.

[16] L. Y. Tsai, Existence of solutions of nonlinear elliptic systems,Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, **8**(1980), 111-127.